ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THỊ XUÂN

THẾ VỊ LOGARIT CÓ TRỌNG VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HOÀNG THỊ XUÂN

THẾ VỊ LOGARIT CÓ TRỌNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu

Thái Nguyên - 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả nghiên cứu là trung thực và chưa được công bố trong bất kì công trình nào khác.

Thái Nguyên, ngày 29 tháng 5 năm 2020

Tác giả luận văn

Hoàng Thị Xuân

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Thầy hướng dẫn, GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu. Em vô cùng biết ơn sự giúp đỡ tận tình, quý báu mà Thầy đã dành cho em trong suốt quá trình thực hiện khóa luận. Nhờ những ý tưởng mà Thầy đã gợi ý, những tài liệu bổ ích mà Thầy đã cung cấp cùng với sự hướng dẫn, chỉ bảo nhiệt tình của Thầy về công việc nghiên cứu, em đã hoàn thành luận văn của mình.

Em xin chân thành cảm ơn các Thầy Cô khoa Toán trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, trong thời gian qua đã tạo cho chúng em môi trường học tập hết sức thuận lợi và thường xuyên có những lời động viên, nhắc nhở giúp chúng em thực hiện tốt công việc làm khóa luận.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2020

Người thực hiện

Hoàng Thị Xuân

Mục lục

MỞ ĐẦU

Thế vị logarit của một độ đo μ xác định trên tập $K \subset \mathbb{C}$ được định nghĩa bởi

$$P_\mu(y) := \int_K log \frac{1}{|x-y|} d\mu(x).$$

Thế vị này dùng để xác định năng lượng logarit của μ và từ đó giúp ta định nghĩa được dung lượng logarit của K. Đây là các khái niệm cổ điển đã được người ta tìm hiểu từ lâu. Trong một công trình gần đây của Thomas Bloom, Norman Levenberg, Vilmos Totik and Franck Wielonsky, người ta đã nghiên cứu các khái niệm thế vị logarit suy rộng, năng lượng logarit suy rộng cùng các ứng dụng của nó. Sự "suy rộng" ở đây được thể hiện là sự xuất hiện của hàm trọng ω trong công thức

$$P_{\mu,\omega}(y) := \int_K log \frac{1}{|x-y|\omega(x)} d\mu(x),$$

với $\omega > 0$ là hàm trọng liên tục xác định trên K.

Mục đích của đề tài là trình bày lại một cách hệ thống các tính chất của thế vị logarit có trọng, đặc biệt là ứng dụng vào nghiên cứu các bất đẳng thức Bernstein - Walsh và Bernstein - Markov vào đánh giá chuẩn các đa thức một biến thông qua hàm cực trị có trọng.

Đề tài trình bày lại một số kết quả cơ bản của bài báo [2] của Thomas Bloom, Norman Levenberg, Vilmos Totik and Franck Wielonsky. Nội dung chính là các tính chất của thế vị logarit có trọng cùng với ứng dụng của nó vào vấn đề xấp xỉ đa thức và đánh giá độ tăng của đa thức.

Chúng tôi dự kiến đạt được một số kết quả về điều kiện đủ để một độ đo thỏa mãn tính chất Bernstein - Markov và một điều kiện của tập compact K cùng với một trọng ω trên đó để thế vị logarit có trọng $P_{\mu,\omega} < \infty$ với một độ đo xác xuất μ nào đó trên K.

Các kết quả này sẽ dùng để đặc trưng tập cực trong $\mathbb{C}$.

Chương 1

Một số kiến thức cơ sở

Ta trình bày tóm tắt một số kiến thức chuẩn bị sẽ được dùng về sau. Những kiến thức này được lấy ra trong tài liệu [1].

1.1. Hàm điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử X là không gian tôpô. Hàm $u : X \to [-\infty, +\infty)$ gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập*

$$X_\alpha = \{x \in X : u(x) < \alpha\}$$

là mở trong X. Hàm $v : X \to [-\infty, +\infty)$ gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu $-v$ là nửa liên tục trên trên X.

Chúng ta có thể dễ thấy định nghĩa trên tương đương với định nghĩa mang tính địa phương sau. Giả sử $u : X \to (-\infty, +\infty]$. Ta nói hàm u là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại lân cận U_{x_0} của x_0 trong X sao cho $\forall x \in U_{x_0}$ ta có:

$$u(x) < u(x_0) + \varepsilon \text{ nếu } u(x_0) \neq -\infty$$
$$u(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \text{ nếu } u(x_0) \neq -\infty.$$

Hàm u gọi là nửa liên tục trên X nếu u nửa liên tục trên tại mọi $x_0 \in X$. Mặt khác nếu ta cho định nghĩa sau. Giả sử $E \subset X$ và $u : E \to [-\infty, +\infty)$ là hàm trên E. Giả sử $x_0 \in \overline{E}$. Ta định nghĩa

$$\limsup_{x \to x_0,\, x \in E} u(x) = \inf\{\sup\{u(y) : y \in V\}\}$$

ở đó inf lấy trên các V chạy qua các lân cận của x_0. Khi đó có thể thấy rằng hàm $u : E \to [-\infty, +\infty)$ là nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) \leq u(x_0).$$

Ta có kết quả sau

Định lý 1.1.2. *Giả sử u là hàm nửa liên tục trên trên không gian tôpô X và $K \Subset X$ là tập compact. Khi đó u đạt cực đại trên K.*

Chứng minh. Các tập $\{x \in X : u(x) < n\}$ với $n \geq 1$ tạo nên phủ mở của K. Do đó có phủ con hữu hạn phủ K. Vậy u bị chặn trên trên K. Giả sử $M = \sup\{u(x) : x \in K\}$. Khi đó các tập mở $\{x \in X : u(x) < M - \frac{1}{n}\}$ không thể phủ K. Vậy có $x_0 \in K$ sao cho $u(x_0) \geq M - \frac{1}{n}$ với mọi n. Vậy $u(x_0) = M$, và định lý được chứng minh. □

Tiếp theo ta cần định lý xấp xỉ sau đối với các hàm nửa liên tục trên.

Định lý 1.1.3. *Giả sử u là hàm nửa liên tục trên và bị chặn trên trên không gian metric (X, d). Khi đó tồn tại dãy giảm các hàm liên tục $\Phi_n : X \to \mathbb{R}$ với*

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = u(x), \ \forall x \in X.$$

Định nghĩa 1.1.4. *Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ gọi là điều hòa dưới trên Ω nếu nó nửa liên tục trên trên Ω, $u \not\equiv -\infty$ trên bất một thành phần liên thông của Ω và thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình trên Ω, nghĩa là với mọi $w \in \Omega$ tồn tại $\varrho > 0$ sao cho mọi $o \leq r < \varrho$ ta có*

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{it}) dt. \tag{1.1}$$

Ta kí hiệu tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là $SH(\Omega)$.

Sau đây là ví dụ đáng chú ý về hàm điều hòa dưới

Mệnh đề 1.1.5. *Nếu $f : \Omega \to \mathbb{C}$ là hàm chỉnh hình trên Ω thì $\log|f|$ là hàm điều hòa dưới.*

Mệnh đề 1.1.6. *Giả sử u, v là các hàm điều hòa dưới trên tập mở Ω trong $\mathbb{C}$. Khi đó:*

(i) $\max(u, v)$ *là hàm điều hòa dưới trên Ω.*

(ii) Tập các hàm điều hòa dưới trên Ω là một nón, nghĩa là nếu $u, v \in SH(\Omega)$ và $\alpha, \beta > 0$ thì $\alpha u + \beta v$ cũng thuộc $SH(\Omega)$.

Bây giờ ta đi đến nguyên lí cực đại của các hàm điều hòa dưới nói rằng giá trị cực đại của hàm đa điều hòa dưới trên tập mở chỉ đạt trên biên của tập mở đó.

Định lý 1.1.7. *Giả sử u là hàm điều hòa dưới trên miền bị chặn Ω trên $\mathbb{C}$. Khi đó:*

(i) Nếu u đạt cực đại toàn thể tại một điểm trên Ω thì u là hằng số trên Ω.

(ii) Nếu $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$ *đối với mọi $\zeta \in \partial\Omega$ thì $u \leq 0$ trên Ω.*

Kết quả sau cho một điều kiện khi nào một hàm lớp C^2 là điều hòa dưới.

Định lý 1.1.8. *Giả sử $u \in C^2(\Omega)$. Khi đó u là điều hòa dưới trên Ω khi và chỉ khi $\triangle u \geq 0$ trên Ω, ở đó*

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

là Laplace của u.

Kết quả sau đây rất có lợi khi cần dán hai hàm điều hòa dưới để cho ta hàm điều hòa dưới.